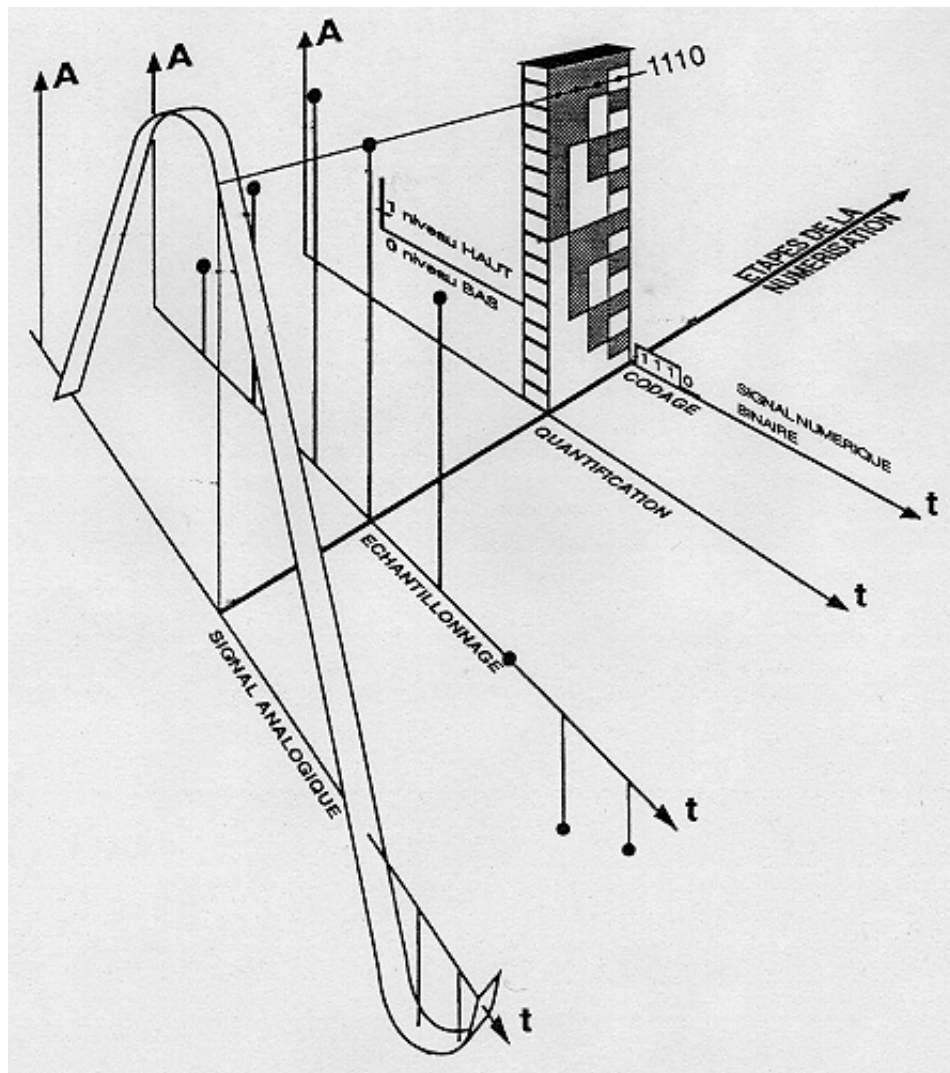


CHAPITRE V

Théorie de l'échantillonnage et de la quantification



SOMMAIRE

I INTRODUCTION.....	3
II THÉORIE DE L'ÉCHANTILLONNAGE.....	3
II.1 ACQUISITION DES SIGNAUX.....	3
II.2 MODÉLISATION DE L'ÉCHANTILLONNAGE	4
II.3 NOTION DE REPLIEMENT DE SPECTRE	4
II.4 THÉORÈME DE SHANNON.....	5
II.5 L'ÉCHANTILLONNAGE BLOCAGE.....	5
II.6 MODÉLISATION DE L'ÉCHANTILLONNEUR BLOQUEUR	5
II.7 NÉCESSITÉ DU FILTRE D'ANTI-REPLIEMENT	6
II.7.1 Caractéristiques idéales.....	6
II.7.2 Filtre réel.....	7
III THÉORIE DE LA QUANTIFICATION	8
III.1 PRINCIPE	8
III.2 BRUIT DE QUANTIFICATION	9
III.3 CARACTÉRISTIQUES DU BRUIT DE QUANTIFICATION	9
III.3.1 Quantification linéaire par défaut.....	9
III.3.2 Quantification linéaire centrée.....	10
III.3.3 Quantification non linéaire	10
III.4 CHOIX DU NOMBRE DE BITS DE QUANTIFICATION	11
III.4.1 Choix classique.....	11
III.4.2 Prise en compte du rapport signal sur bruit.....	11
IV PRINCIPE DE CODAGE	12
IV.1 CODAGE UNIPOLAIRE	12
IV.1.1 Binaire naturel.....	12
IV.1.2 DCB.....	13
IV.1.3 Code de Gray ou réfléchi.....	13
IV.2 CODAGE BIPOLAIRE.....	13
IV.2.1 Code amplitude de signe.....	13
IV.2.2 Code binaire décalé.....	13
IV.2.3 Code complément à deux.....	14
IV.2.4 Code complément à un.....	14
ANNEXE A	15
RAPPEL TRAITEMENT DU SIGNAL	15
OUTILS MATHÉMATIQUES	15
I LA TRANSFORMÉE DE FOURIER	15
I.1 DÉFINITION DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER	15
I.2 PROPRIÉTÉS DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER	15
II.3 LE PRODUIT DE CONVOLUTION	15
II.4 L'IMPULSION DE DIRAC ($\delta(t)$).....	16
II.5 LE PEIGNE DE DIRAC.....	16
ANNEXE B	17
I EXEMPLE DE FILTRE PASSE-BAS D'ORDRE 2.....	17
II EXEMPLE DE SYNTHÈSE DE FILTRE	17
II.1 GABARIT DU FILTRE DE TYPE BUTTERWORTH	17

THEORIE DE L'ECHANTILLONNAGE ET DE LA QUANTIFICATION

I Introduction

L'objectif de cette partie est de mettre en place les outils mathématiques permettant de modéliser l'acquisition numérique de signaux analogiques.

Le but est de comprendre :

- Le choix de T_e , période d'échantillonnage.
- Le Choix de n , nombre de bit de code.
- L'influence de l'échantillonnage sur les propriétés d'un signal.

Nous devons garder à l'esprit le fait que l'acquisition numérique ne doit pas détériorer le signal. On doit conserver au travers de la numérisation l'information utile :

Voix : [0 ;20kHz] ; Vidéo [0 6MHz]

De plus, il faut limiter l'espace mémoire nécessaire au stockage. En effet, il faut stocker « $n \cdot F_e$ » bits par seconde. On s'attachera dans une chaîne d'acquisition à minimiser cette valeur tout en ne détériorant pas le signal.

II Théorie de l'échantillonnage

En annexe, vous trouverez les rappels permettant de mettre en place la théorie de l'échantillonnage. Pour plus d'informations vous pouvez vous référer au cours de Traitement du Signal (G-Signal).

II.1 Acquisition des Signaux

Pour transformer un signal analogique en un signal numérique, il faut le discrétiser. On va donc prélever régulièrement des échantillons du signal analogique pour le rendre discret et permettre ainsi sa numérisation :

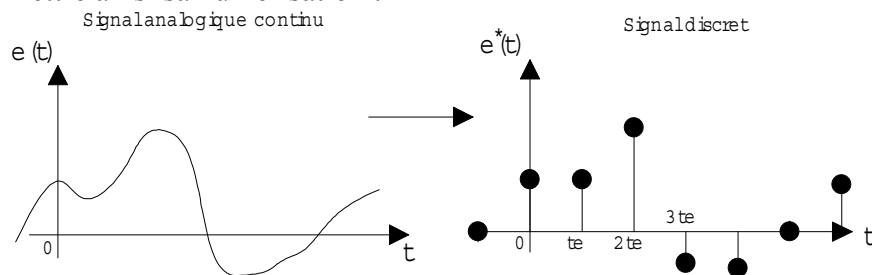


Figure 1 : Allure d'un signal échantillonné

On prend ainsi des valeurs de $e(t)$ à des intervalles de temps régulier (tous les T_e , période d'échantillonnage) à une fréquence F_e dite fréquence d'échantillonnage, que l'on déterminera par la suite. Suite à cet échantillonnage, on quantifie chaque échantillon par une valeur binaire pour la stocker sur un support numérique.

II.2 Modélisation de l'échantillonnage

L'opération mathématique associée à cette discrétisation revient à multiplier le signal $e(t)$ par un peigne de Dirac $\delta_{T_e}(t)$:

$$e^*(t) = e(t) \cdot \delta_{T_e}(t) = e(t) \cdot \sum \delta(t - nT_e)$$

On peut ainsi calculer la transformée de Fourier du signal échantillonné en utilisant les propriétés liant une multiplication temporelle qui dans l'espace fréquentiel devient un produit de convolution :

$$E^*(f) = \text{TF}(e(t) \cdot P_{T_e}(t)) \rightarrow E^*(f) = \frac{1}{T_e} E(f) * \delta_{f_e = \frac{1}{T_e}}(f)$$

soit :

$$E^*(f) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E(f - k \cdot f_e)$$

Echantillonner le signal $e(t)$ dans le domaine temporel, revient donc à recopier dans le domaine fréquentiel son spectre $E(f)$ tous les f_e .

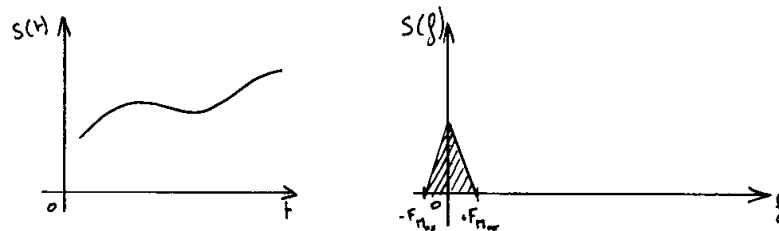


Figure 2 : Propriétés temporelles et fréquentielles du signal d'entrée

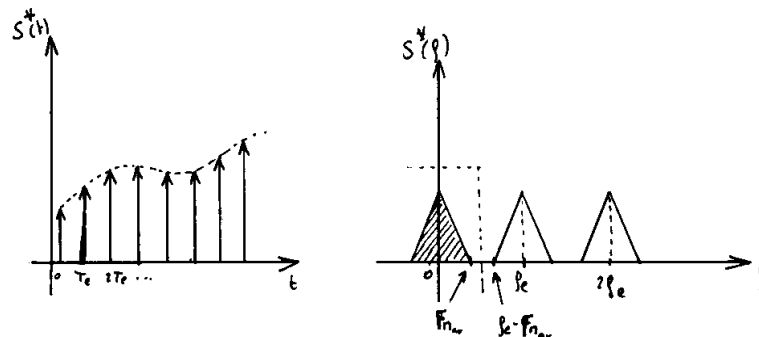


Figure 3 : Propriétés temporelles et fréquentielles du signal échantillonné

II.3 Notion de repliement de spectre

On remarquera que si le spectre du signal d'origine a une largeur supérieure à $2f_e$ on a ce qu'on appelle un **repliement de spectre**.

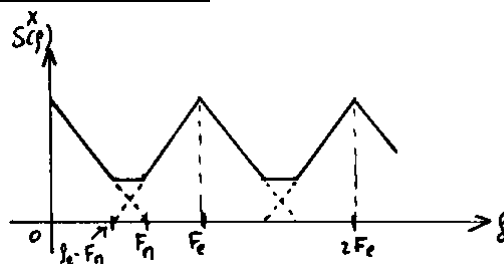


Figure 4 : Echantillonnage provoquant le repliement de spectre

S'il y a repliement de spectre, il n'est plus possible de retrouver le spectre du signal d'origine. Dans ce cas, l'opération d'échantillonnage modifie les caractéristiques du signal d'entrée.

Ainsi, si l'on ne veut pas perdre d'informations par rapport au signal que l'on échantillonne, on devra toujours respecter la condition : $(F_e \geq 2F_{\max})$. Condition plus connue par le théorème de Shannon.

II.4 Théorème de Shannon

On ne peut échantillonner un signal sans pertes d'informations que si :

$$F_e > 2F_{\max}$$

* **Note :** Rôle du filtre d'entrée

Dans le cas d'un spectre de largeur infinie (la réalité), il y a donc toujours repliement de spectre. Il est donc nécessaire de filtrer le signal d'origine afin de limiter cet effet de repliement.

Par exemple, dans le cadre de l'audio, on ne va garder que les fréquences que l'oreille est capable d'entendre. Les caractéristiques internes de l'oreille induisent une sensibilité fréquentielle pouvant aller de 20hz à 20khz. C'est pour cette raison que l'on a pris comme fréquence d'échantillonnage $f_e = 44,1$ khz dans le cas du CD.

Ainsi, avant d'échantillonner le signal, on place en amont un filtre qui a pour but d'éliminer toutes les fréquences supérieures à 20khz. C'est un filtre passe bas.

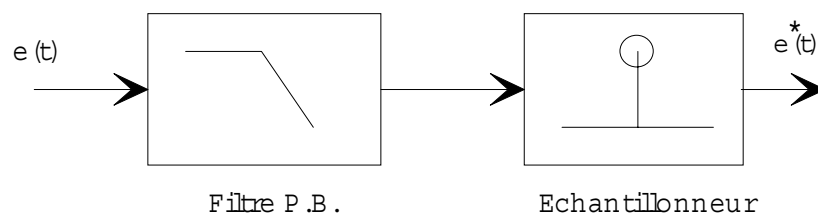


Figure 5 : Utilisation du filtre en amont de l'échantillonneur

II.5 L'échantillonnage blocage

Une fois le signal filtré et échantillonné, il reste à le quantifier. Pour pouvoir réaliser cette fonction, on doit maintenir constant la valeur à quantifier afin de permettre au CAN de traiter l'échantillon et de le numériser. On appelle cette opération, le blocage. Ce blocage doit être d'une durée supérieure au temps de conversion :

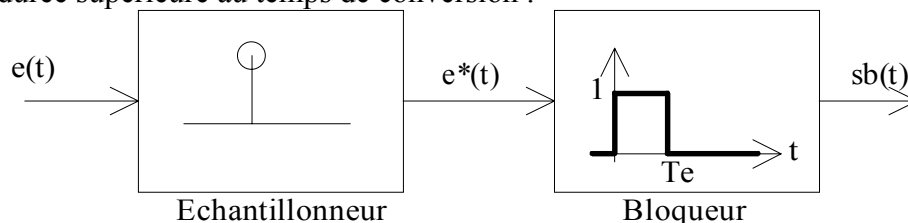


Figure 6 : Association d'un bloqueur à l'échantillonneur

II.6 Modélisation de l'échantillonneur bloqueur

On suppose le blocage d'une durée θT_e où $\theta \in]0;1]$. L'opération mathématique associée est la convolution du signal échantillonné $e^*(t)$ avec un rectangle de durée T_e :

$$s_b(t) = e^*(t) * \text{Rect}_{\theta T_e}(t)$$

Ce qui alors pour le spectre, revient à le multiplier par un sinus cardinal :

$$S_b(f) = \lambda E^*(f) \cdot \text{sinc}\left(\theta \frac{f}{f_e}\right)$$

On peut tracer alors les caractéristiques du signal échantillonné-bloqué en fonction du signal d'entrée :

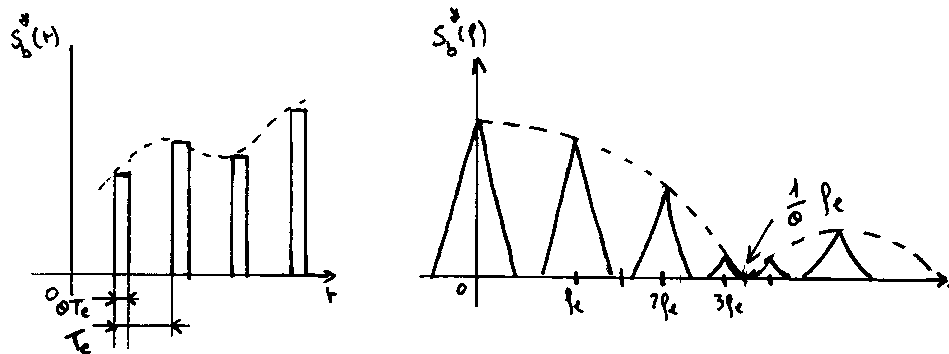


Figure 7 : Propriétés d'un signal échantillonné bloqué ($\theta < 1$)

On note que dans le cas d'un blocage de faible durée ($\theta < 1$), le sinus-cardinal atténue les premières recopies de spectre. Un filtre passe-bas avec une fréquence de coupure à $f_e/2$ permettrait de récupérer de manière parfaite le signal d'entrée.

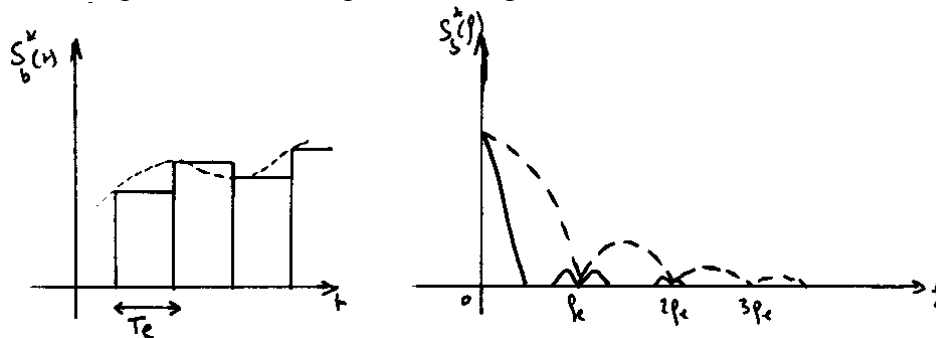


Figure 8 : Propriétés d'un signal échantillonné bloqué ($\theta = 1$)

Dans le cas d'un signal bloqué sur toute la période d'échantillonnage (ce qui correspond en fait au signal restitué en sortie d'un CNA), le sinus-cardinal écrase les fréquences proches de la fréquence d'échantillonnage et vient donc modifier les propriétés du spectre du signal d'entrée qui ne peut plus être restitué de manière parfaite à l'aide d'un simple filtre. Par contre, il présente l'avantage d'éliminer les recopies de spectre et donc d'alléger le contenu spectral du signal.

II.7 Nécessité du filtre d'anti-repliement

II.7.1 Caractéristiques idéales

Avant de réaliser l'échantillonnage du signal, nous avons vu la nécessité de filtrer ce dernier afin d'éviter ce que l'on appelle le repliement de spectre, plus connu sous la forme du théorème de Shannon.

Idéalisé, il doit avoir un gain de 1 sur une bande de fréquence f_e , centrée en zéro. Son rôle va être de limiter le contenu spectral du signal à la partie utile. Il va participer aussi à limiter l'influence du bruit éventuellement présent sur le signal à numériser.

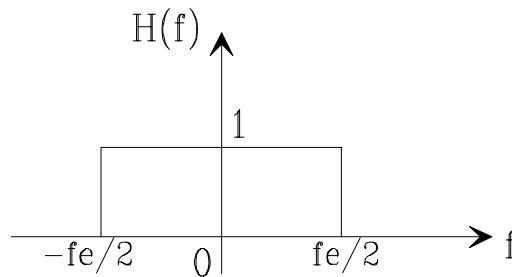


Figure 9 : Gabarit idéal du filtre anti-repliement

II.7.2 Filtre réel

De manière idéale, un filtre passe bas aura un gain constant dans la bande passante, et présentera une coupure infinie au-delà de sa fréquence F_c de coupure.

De manière réelle, on est amené à réaliser la synthèse d'un filtre en définissant sa fréquence de coupure à -3db ainsi qu'une atténuation minimum au-delà d'une certaine fréquence.

On fait en général appel, dans le cadre d'un filtre anti-repliement, à un filtre du type Butterworth :

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^{2n}}}$$

Ce type de filtre présente l'avantage de répondre au critère de maximum de platitude dans la bande passante et de présenter un retard de groupe constant jusqu'à $f_c/2$.

Le choix de l'ordre du filtre s'effectue de manière à limiter la puissance du signal dû aux recopies de spectre. On limite donc le recouvrement de spectre en terme de puissance ramenée par rapport à la puissance du signal :

$$\frac{P_{\text{recouvrement}}}{P_{\text{signal}}} \leq X\%$$

Si l'on suppose un signal à spectre constant, et que l'on admet une puissance ramenée d'au plus 1%, nous pouvons établir en fonction de n , la valeur de la fréquence de coupure du filtre :

n	1	2	4	6
F_c	$F_e/127$	$F_e/6$	$F_e/3$	$F_e/2$

Rq : Problème lié au retard de groupe

Tout filtre introduit un déphasage qui peut introduire une distorsion dans le cadre d'un signal multifréquence (cas de l'audio) :

$$V_e = V \cos(\omega t) \Rightarrow V_s = V \cos(\omega t - \varphi) = V \cos\left(\omega\left(t - \frac{\varphi}{\omega}\right)\right)$$

Ainsi un signal en sortie d'un filtre ressort avec un retard Tr : $Tr = \frac{\varphi}{\omega}$.

Si ce retard n'est pas constant pour toutes les fréquences (déphasage linéaire avec la fréquence), on obtient alors une distorsion. Deux signaux synchrones, en entrée du filtre, ressortent désynchronisés :

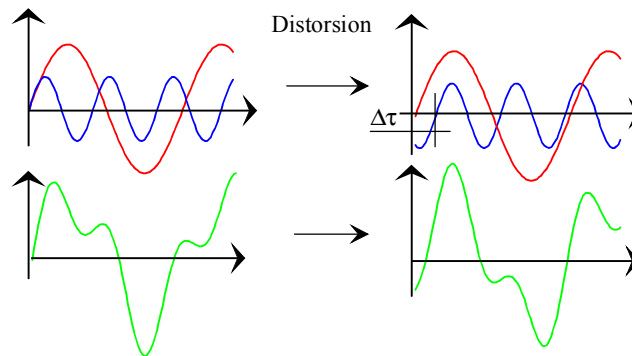


Figure 10 : distorsion introduite par un filtre à déphasage non linéaire

On peut très brièvement résumer la propriété de certains filtres :

- Un filtre dit de Bessel assurera un temps retard de groupe constant dans la bande passante, mais une atténuation lente.
- Un filtre de Tchebychev donnera une atténuation rapide mais par contre on aura de l'ondulation dans la bande passante et un très mauvais retard de groupe.
- Un filtre de Butterworth est un très bon compromis, il assure une réponse plate avec un retard de groupe constant pour les fréquences inférieures à $f_c/2$.

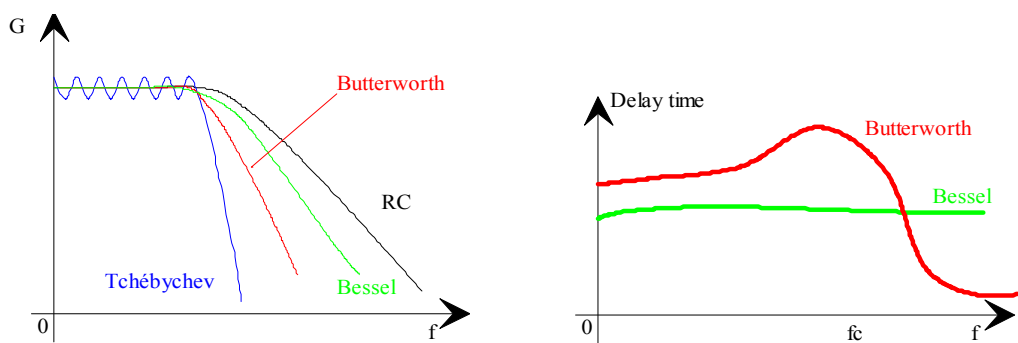


Figure 11 : Propriétés de différentes synthèses de filtre

III Théorie de la quantification

Le signal échantillonné - bloqué peut à ce stade être converti sous forme binaire (numérique) pour être stocké. Ce codage s'appelle la quantification.

Le rôle de la quantification est de donner une image binaire d'un signal analogique :

Passage Analogique – Numérique

Signal Continu – Signal discret

Tension – chiffre

III.1 Principe

A chaque niveau de tension est associé une valeur binaire codée sur n bits:

N bits vont permettre de distinguer 2^n niveaux de tension répartis de $-V_m$ à $+V_m$. On a

ainsi un pas de quantification : $q = \frac{2V_m}{2^n}$

Ainsi un signal de $\pm 5V$ codé sur 8 bits donnera un pas de quantification $q=39mv$.

La caractéristique d'entrée – sortie d'un CAN est une caractéristique en marche d'escalier. Chaque palier a une largeur d'un pas de quantification q. La passage d'un palier à un autre correspond à une variation de '1' du code.

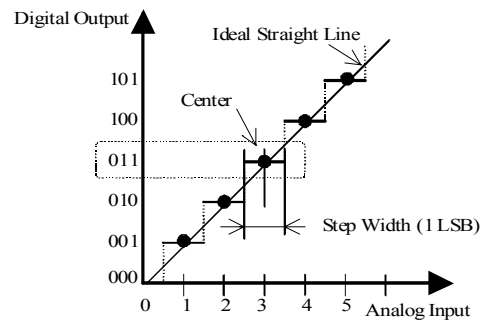


Figure 12 : Caractéristique entrée - sortie d'un CAN

Le pas de quantification est aussi appelé quantum. Il correspond à la résolution du convertisseur. Le quantum est la plus petite variation de tension que le convertisseur peut coder.

III.2 Bruit de quantification

On a donc, lors de la quantification, une erreur de codage entre le signal échantillonné et la valeur du code correspondant à un niveau de tension (ce niveau de tension étant la moyenne des tensions correspondant à ce code).

Gamme de tension \Leftrightarrow Code unique

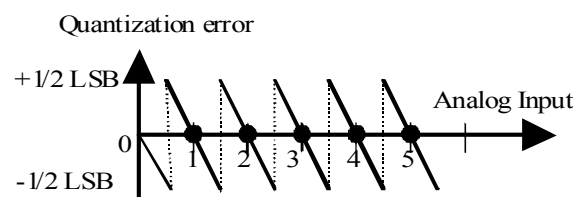


Figure 13 : Allure du bruit de quantification

L'évolution du bruit de quantification est une évolution en dent de scie avec une amplitude égal au quantum. En fonction du principe de quantification utilisé, les caractéristiques du bruit de quantification varient.

III.3 Caractéristiques du bruit de quantification

III.3.1 Quantification linéaire par défaut

Dans ce cas, le signal variant de 0 à E, on code les 2^n niveaux de tension avec un pas de quantification : $q = \frac{E}{2^n}$. On obtient une codification du signal d'entrée telle que :

$$[nq; (n+1)q] \longrightarrow nq$$

L'erreur de quantification évolue alors entre 0 et q.

$$0 < \varepsilon < q$$

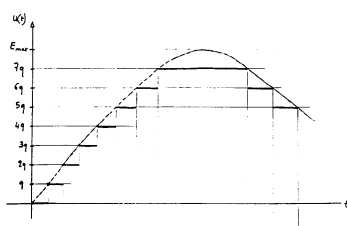


Figure 14 : Quantification par défaut

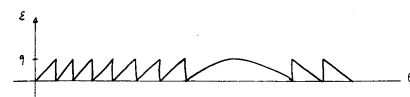


Figure 15 : erreur de quantification

Si l'on suppose que le signal est de répartition continue, avec un écart type supérieur à quelques quantum, on peut admettre que l'évolution du bruit de quantification ϵ est en dent de scie. On peut ainsi calculer sa puissance en terme de moyenne quadratique (elle correspond à la puissance du signal dans une résistance de 1Ω) :

$$P_{\epsilon} = \langle \epsilon^2(t) \rangle = \frac{q^2}{3}$$

III.3.2 Quantification linéaire centrée

Dans la pratique, on préfère effectuer une quantification centrée. Dans ce cas, le bruit de quantification évolue entre $\pm q/2$:

$$-q/2 < \epsilon < +q/2$$

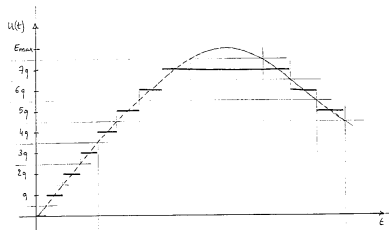


Figure 16 : quantification centrée

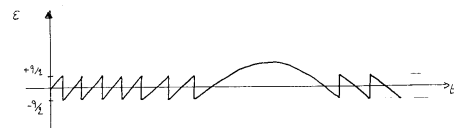


Figure 17 : erreur de quantification

Le signal d'entrée est donc codé tel que :

$$\left[(2n-1)\frac{q}{2}; (2n+1)\frac{q}{2} \right] \longrightarrow nq$$

La puissance du bruit de quantification que l'on obtient est :

$$P_{\epsilon} = \langle \epsilon^2(t) \rangle = \frac{q^2}{12}$$

On notera l'avantage du codage centré par rapport à un codage par défaut. Le bruit de quantification est plus faible.

III.3.3 Quantification non linéaire

Dans le cadre de l'audio (cadre de la téléphonie) plutôt que d'utiliser une loi de quantification linéaire, on fait appel à une quantification logarithmique.

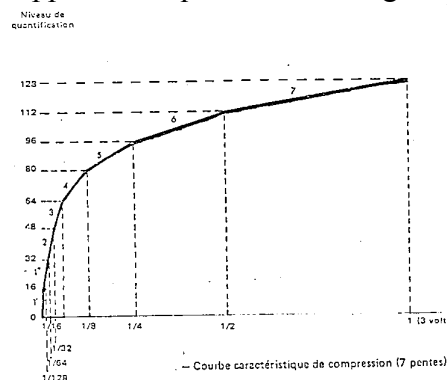


Figure 18 : Cas d'une quantification logarithmique

L'oreille est un capteur sensible de manière logarithmique au son (une amplitude sonore dix fois plus importante induit une sensation de volume sonore double). On adapte l'amplitude du bruit de quantification à l'amplitude du signal d'entrée de manière à avoir un

rapport signal sur bruit constant (ou presque) et meilleur qu'une quantification linéaire (courbe ci-dessous).

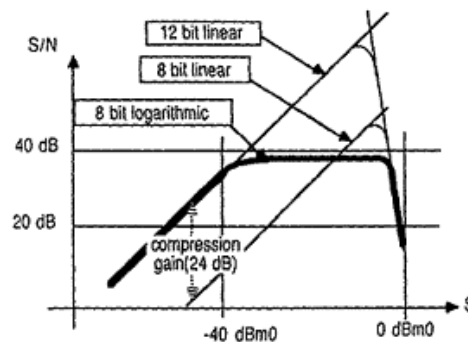


Figure 19 : Evolution du SNR avec l'amplitude du signal

On montre que si la fonction de quantification est une fonction logarithmique du type $y = 1 + (\log(x)/k)$, le SNR devient constant et indépendant du niveau du signal d'entrée. Par contre pour les signaux de faible niveau, on ne peut utiliser cette fonction, on utilise une approximation de cette courbe. C'est pour cette raison que l'on trouve deux lois de quantification :

Loi μ : USA/Canada/Japon et philippines

Loi A : Europe et reste du monde

Elles ne diffèrent que par la fonction utilisée pour coder les faibles niveaux.

III.4 Choix du nombre de bits de quantification

III.4.1 Choix classique

Dans le cadre d'une simple acquisition, on peut se contenter de choisir 'n' vis à vis de la résolution souhaitée :

n	résolution	1 quantum (%)
8	1/256	0.391
10	1/1024	0.0977
12	1/4096	0.0244
14	1/16384	0.0061

III.4.2 Prise en compte du rapport signal sur bruit

Dans le cadre d'une acquisition - restitution, ce qui est le cas pour l'audio numérique, on va choisir le nombre de bits de codage par rapport au rapport signal sur bruit :

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 10 \log \frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{bruit}}}$$

Les puissances sont ici calculées vis à vis d'une charge de 1Ω . Elles correspondent à la moyenne quadratique du signal :

$$P_v = \langle v^2(t) \rangle$$

Ainsi, dans le cas d'un signal sinusoïdal parcourant la pleine échelle du convertisseur, nous obtenons avec une quantification linéaire centrée un rapport signal sur bruit :

$$\boxed{\text{SNR}_{\text{dB}} = 6n + 1.76\text{dB}}$$

Ce qui signifie qu'un bit de code rajoute 6dB de rapport signal sur bruit.

Dans le cadre du Compact Disc, la prise en compte de la physiologie de l'oreille fait apparaître un masquage sonore entre deux sons s'ils sont espacés de plus de 40dB. De plus, les dynamiques musicales (Type Opéra) sont d'environ 40 dB. Il faut donc un SNR d'au moins 80dB pour effectuer un enregistrement Haute Fidélité. Un codage sur 14 bits suffit (85.76 dB de SNR). On a utilisé un code sur 16 car cela représente 2 octets, ce qui d'un point de vue informatique est plus simple à gérer. On a donc pour le C.D. un enregistrement qui est effectué avec un SNR de 96dB.

Rq : pour un signal sinusoïdal d'amplitude V_{\sin} (inférieur à la pleine amplitude E), le calcul du SNR donne :

$$\text{SNR}_{\text{dB}} = 6n + 1.76_{\text{dB}} + 20 \log \left(\frac{V_{\sin}}{E} \right)$$

Le SNR dans une quantification linéaire dépend de l'amplitude du signal.

IV Principe de codage

Le codage permet d'établir la correspondance entre le signal analogique et sa valeur binaire. On le divise en deux groupes qui sont fonction de :

Signe du signal constant
UNIPOLAIRE

Signe du signal variable
BIPOLAIRE

IV.1 Codage unipolaire

N	binaire naturel	DC B 8.4.21.	code de gray
15	1111	0001 : 0101	1000
14	1110	0100	1001
13	1101	0011	1011
12	1100	0010	1010
11	1011	0001	1110
10	1010	0001 : 0000	1111
9	1001	1001	1101
8	1000	1000	1100
7	0111	0111	0100
6	0110	0110	0101
5	0101	0101	0111
4	0100	0100	0110
3	0011	0011	0010
2	0010	0010	0011
1	0001	0001	0001
0	0000	0000	0000

Figure 20 : Code unipolaire

IV.1.1 Binaire naturel

$$N : b_{n-1} b_{n-2} \dots b_1 b_0$$

$$N = \sum_{i=0}^{n-1} b_i 2^i = b_{n-1} 2^{n-1} + \dots + b_0 2^0$$

avec b_{n-1} le MSB (Most Significant Bit) et b_0 le LSB (Least Significant Bit).

Au code « N » correspond la tension $V = q(b_{n-1} 2^{n-1} + \dots + b_0 2^0)$.

Ce type de code est le plus utilisé.

IV.1.2 DCB

Décimal Codé Binaire : codage du chiffre décimal par mot binaire de 4 bits appelé Quad :

$$V = \frac{V_{\text{ref}}}{10} [2^3 b_3 + 2^2 b_2 + 2^1 b_1 + 2^0 b_0] + \frac{V_{\text{ref}}}{100} [8b_3 + 4b_2 + 2b_1 + 1b_0] \dots$$

$$N : (a_3 a_2 a_1 a_0) (b_3 b_2 b_1 b_0) (\dots)$$

Son utilisation permet une gestion plus simple de l'affichage des données.
Ici on a utilisé un code [8.4.2.1], on peut aussi utiliser un code [1.2.4.2].

IV.1.3 Code de Gray ou réfléchi

Dans ce code, le passage d'un nombre au suivant ne nécessite le changement que d'un seul bit. Cela limite les transitions (parasites). Il est souvent utilisé pour les codages angulaires.

IV.2 Codage bipolaire

N	amplitude signe	binaire décalé	complément à 2	complément à 1
7	0111	1111	0111	0111
6	0110	1110	0110	0110
5	0101	1101	0101	0101
4	0100	1100	0100	0100
3	0011	1011	0011	0011
2	0010	1010	0010	0010
1	0001	1001	0001	0001
0	0000 -1000	1000	0000	0000
-1	1001	0111	1111	1110
-2	1010	0110	1110	1101
-3	1011	0101	1101	1100
-4	1100	0100	1100	1011
-5	1101	0011	1011	1010
-6	1110	0010	1010	1001
-7	1111	0001	1001	1000
-8	—	0000	1000	—

Figure 21 : code bipolaire

IV.2.1 Code amplitude de signe

C'est un code qui reprend le code binaire naturel avec en tête un bit de signe :

[code signe][code binaire naturel]

« + » → « 1 »

« - » → « 0 »

C'est un code que l'on retrouve pour des voltmètres numériques ou des systèmes évoluant peu autour de zéro. Mais ce code ne se prête pas aux opérations arithmétiques.

IV.2.2 Code binaire décalé

0000 → -Vref

1111 → +Vref

$$V = q(b_{n-1} 2^{n-1} + \dots + b_0 2^0) - V_{\text{ref}}$$

b_{n-1} joue le rôle de bit de signe (0 valeur négative ; 1 valeur positive)

C'est un code que l'on retrouve dans les interfaces Numérique - Analogique (CNA).

IV.2.3 Code complément à deux

C'est le code binaire décalé avec le bit de signe inversé :

$$V = q(\overline{b_{n-1}} 2^{n-1} + \dots + b_0 2^0) - V_{\text{ref}}$$

Ainsi pour un chiffre positif on utilise le codage binaire naturel. Pour un chiffre négatif on prend le complément du nombre positif auquel on rajoute le chiffre (****0001).

Ce code se prête bien aux opérations arithmétiques (informatique).

IV.2.4 Code complément à un

Chiffre positif : binaire naturel

Chiffre négatif : complément bit à bit du binaire naturel

Utilisé dans les compteurs (circuits logiques).

Annexe A

Rappel Traitement du signal Outils mathématiques

I La transformée de Fourier

(Joseph Fourier, mathématicien Français, 1768-1830)

I.1 Définition de la transformée de Fourier

A tout signal fonction du temps $e(t)$, on peut associer son image $E(f)$ définie dans l'espace des fréquences. E est appelée transformée de Fourier de e , elle est définie par:

$$E(f) = F(e(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) e^{-j2\pi f \cdot t} dt$$

I.2 Propriétés de la transformée de Fourier

Il y a complète dualité entre l'espace temps et l'espace fréquence qui est représenté par la transformée de Fourier. Cela implique l'existence de la transformée de Fourier inverse :

$$e(t) = F^{-1}(E(f)) = \int_{-\infty}^{+\infty} E(f) e^{j2\pi f \cdot t} df$$

La transformée de Fourier introduit la notion de spectre d'un signal qui est la caractéristique fréquentielle d'un signal. Un signal peut être ainsi défini dans deux espaces, soit temporel soit fréquentiel.

Remarque: On peut étendre la transformée de Fourier en parlant de transformée de Laplace. On pose p comme variable complexe ($p=j2\pi f$), ainsi :

$$L(e(t)) = E(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) \cdot e^{-pt} dt$$

Propriétés: Linéarité, commutativité, associativité, bijectivité...

$$\text{de plus } L\left(\frac{de(t)}{dt}\right) = p \cdot E(p) - e(0^-) \quad ; \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} pE(p) = e(0^+) \quad ; \quad \lim_{p \rightarrow 0} pE(p) = e(+\infty)$$

II.3 Le produit de convolution

On définit le produit de convolution entre deux signaux en décalant de τ l'un des deux signaux et en intégrant leur produit sur le temps :

$$s(t) = e(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(\lambda) h(t - \lambda) d\lambda$$

Propriétés: On notera que la transformée de $s(t)$ traversant un filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$ vaut :

$$S(f) = E(f) \cdot H(f)$$

Inversement, si $S(f) = E(f) \cdot H(f)$ alors $s(t) = e(t) * h(t)$

C'est une propriété très importante. Une multiplication temporelle devient un produit de convolution fréquentiel. De même un produit de convolution temporel devient une multiplication fréquentielle.

II.4 L'impulsion de Dirac ($\delta(t)$)

Première approche: c'est une impulsion de durée t_0 , d'amplitude A_{t_0} , avec t_0 très petit. C'est une impulsion d'énergie constante.

Définition mathématique :

$$\delta(t) : t \neq 0 \quad \delta(t) = 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \text{ de plus } e(t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(t) \cdot \delta(t - t_0) dt$$

Propriété :

L'impulsion de Dirac est le neutre de la convolution: $s(t) = s(t) * \delta(t)$

$$TF(\delta(t)) = 1 \Leftrightarrow \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi ft} df$$

II.5 Le Peigne de Dirac

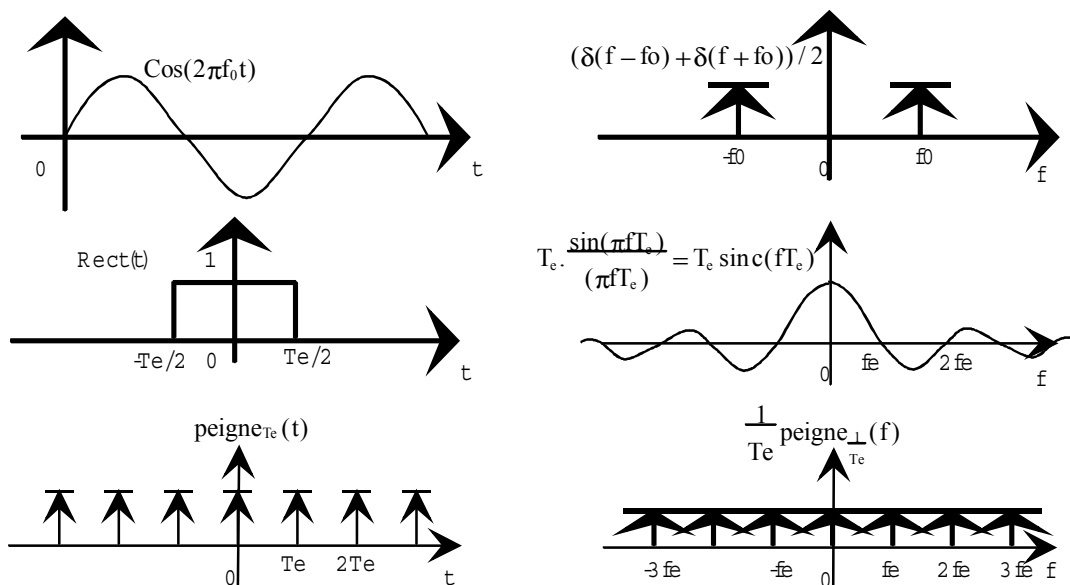
C'est un train d'impulsion espacé de T_e . On le note $P_{T_e}(t)$ et

$$P_{T_e}(t) = \sum_n \delta(t - nT_e)$$

$$\text{De plus: } TF(P_{T_e}(t)) = \frac{1}{T_e} P_{\frac{1}{T_e}}(f)$$

rq: Pour un système linéaire qui, à une fonction d'entrée $e(t)$, fait correspondre la fonction de sortie $s(t)$ par une fonction de transfert $h(t)$, si $e(t) = \delta(t)$ alors $S(f) = E(f) \cdot H(f) = H(f)$ donc $s(t) = h(t)$. On appelle ainsi h , la réponse impulsionnelle.

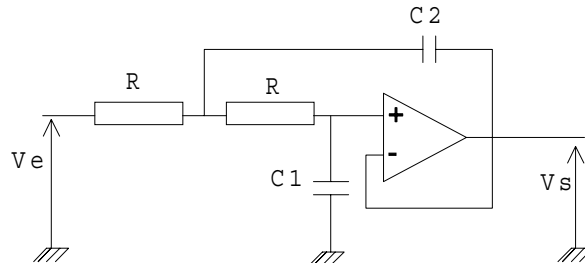
Exemple de transformée de Fourier :



Annexe B

Filtrage

I Exemple de filtre passe-bas d'ordre 2



La fonction de transfert de ce circuit est:

$$\frac{V_s}{V_e} = \frac{1}{1 + 2m j \frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

$$\text{avec: } \omega_0 = \frac{1}{R\sqrt{C_1 C_2}} \text{ et } m = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}$$

II Exemple de synthèse de filtre

On souhaite réaliser un filtre du type butterworth (-3dB à Fe) vérifiant une atténuation minimum de 20 dB à 1,5 fois la fréquence d'échantillonnage.

II.1 Gabarit du filtre de type butterworth

$$T(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x^{2n})}} \text{ avec } T(x) = |T(s)| \text{ et donc } s = jx = j\omega/\omega_0$$

n est l'ordre du filtre.

II.2 Choix de l'ordre du filtre (n)

$$n > \frac{\lg(10^{\frac{b}{10}} - 1)}{2 \lg x_1}$$

avec b gain d'atténuation minimum en fréquence $x_1 = \omega_1/\omega_0$

II.3 Synthèse du filtre

Décomposition en cellule élémentaire du second ordre.

Recherche des zéros de : $P(x) = 1 + x^{2n} = 0$

Les zéros sont du type $a \pm jb$ avec $a^2 + b^2 = 1$

Donc on peut écrire : $P(x) = ((x \pm a) + jb)((x \pm a) - jb) \dots$

$P(x) = [(x \pm a)^2 + b^2] \dots$

Ce qui correspond au module de :

$$P(x) = \left| [b + j(x + a)][b + j(x - a)] \dots \right| = |P(s)|$$

$$\text{avec } P(s) = [b + s + ja][b + s - ja] \dots; |T| = \sqrt{zz}$$

$$P(s) = [a^2 + b^2 + 2bs + s^2] \dots$$

Ainsi on retrouve la fonction de transfert décomposée en ordre 2.

Dans le cas $n=6$:

Trois cellules d'ordre 2 :

$$m = \sin \left(\frac{\pi}{12} + k \frac{\pi}{12} \right)_{k:[0;1;2]}$$

Cellule	M	R	C ₁	C ₂
1	0,2588	3.07 kΩ	10 nF	0,67 nF
2	0,7071	1,125 kΩ	10 nF	5 nF
3	0,9659	824 Ω	10 nF	9,32 nF